# DÉNOMBREMENT

## CAS DE RÉFÉRENCE ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

## 1 Dénombrements de référence

### 1.1 Cardinal d'un ensemble fini

Étant donné un ensemble fini $E$, son cardinal est le nombre d'éléments qu'il contient. C'est un nombre entier, noté $\text{Card}(E)$.

**Propriétés :** soient deux ensembles finis $A$ et $B$, et une famille d'ensembles finis $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$.

1. Si $A \cap B = \emptyset$, $\text{Card}(A \sqcup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
2. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
3. Si les ensembles $A_k, k \in [\![1, n]\!]$ sont deux à deux disjoints,

$$\text{Card}(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \cdots + \text{Card}(A_n)$$

### 1.2 Factorielle d'un nombre entier

**Définition :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, la factorielle de $n$ est définie par :

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \text{ si } n \neq 0 \qquad \text{et} \qquad 0! = 1$$

**Propriétés :** pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$,

1. $(n+1)! = (n+1) \times n!$
2. $(n+p)! = (n+p) \times (n+p-1) \times \cdots \times (n+1) \times n!$
3. Si $p \leqslant n$, $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$

### 1.3 Dénombrements de référence

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. Notons $p = \text{Card}(E)$ et $n = \text{Card}(F)$.

1. Le nombre d'applications $f$ de $E$ vers $F$ est $n^p$. Autrement dit,

$$\text{Card}\left(F^E\right) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$$

   C'est aussi le nombre de $p$-uplets dans $F^p$.
2. Le nombre de permutations de $F$ est $n!$. C'est aussi le nombre de $n$-uplets sans répétitions de $F^n$, énumérant chacun des $n$ éléments de $F$ une et une seule fois.
3. Si $p \leqslant n$, le nombre d'applications $f$ **injectives** de $E$ vers $F$ est

$$\mathcal{A}_n^p = n \times (n-1) \times \cdot \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

   C'est aussi le nombre de $p$-uplets **sans répétitions** dans $F^p$.
4. Si $p \leqslant n$, le nombre de sous-ensembles de $F$ à $p$ éléments est $\binom{n}{p} = \dfrac{\mathcal{A}_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$

## 2 Coefficients binomiaux

### 2.1 Définition et propriétés

**Définition :** les coefficients binomiaux sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$ par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Si $E$ est un ensemble de cardinal $n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de $E$ de cardinaux $k$.

# DÉNOMBREMENT

## CAS DE RÉFÉRENCE ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

**Propriétés :** pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,
2. si $n \neq 0$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$,
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
4. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

**Triangle de Pascal :** les coefficients du binômes pour $n \in [\![0, 4]\!]$, par exemple, peuvent être données dans le tableau triangulaire suivant. Les propriétés énoncées ci-dessus se lisent sur le triangle et peuvent être utilisées pour le prolonger à des valeurs $n > 4$.

| | $k=0$ | $k=1$ | $k=2$ | $k=3$ | $k=4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 1 | | | | |
| $n=1$ | 1 | 1 | | | |
| $n=2$ | 1 | 2 | 1 | | |
| $n=3$ | 1 | 3 | 3 | 1 | |
| $n=4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |

### 2.2 Formule du binôme

**La formule :** pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k \\ &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\, y + \cdots + \binom{n}{n-1} x\, y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n\end{aligned}$$